Ejercicio 1

(1,25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^{33}

(1,25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación matricial siguiente: $(X + I_2)A = 2A + C \cdot B^t$

SOLUCIÓN:
Calculamos las potencias de A que sean necesarias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

…… en general ….

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto: $A^{33} = \begin{pmatrix} 2^{32} & 0 & 2^{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{32} & 0 & 2^{32} \end{pmatrix}$

Para el segundo apartado:

$$(X + I_2)A = 2A + C \cdot B^t;$$
$$(XA + I_2A) = 2A + C \cdot B^t;$$
$$XA = 2A + C \cdot B^t - I_2A;$$
$$XA = 2A - A + C \cdot B^t;$$
$$XA = A + C \cdot B^t;$$
$$X = (A + C \cdot B^t)A^{-1};\ (*)$$

Necesitamos calcular A^{-1} y B^t

$$A^{-1} = \frac{(adj(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot (-3) & (-1)^{1+2} \cdot (-1) \\ (-1)^{2+1} \cdot (2) & (-1)^{2+2} \cdot (2) \end{pmatrix}^t}{-6 - (-2)} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{-4} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

Sustituyendo las matrices por sus valores en la expresión (*) obtenemos:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = I_2;$$

Ejercicio 2
(2 puntos) En cierto establecimiento hay disponibles dos piensos para perros, el pienso A, y el pienso B, cuyas composiciones por 10g de producto vienen especificadas en la siguiente tabla:

Composición cada 10g	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas
Pienso A	5 unidades	7 unidades	2 unidades
Pienso B	6 unidades	6 unidades	3 unidades

Un veterinario receta dos tipos de dietas a los animales, la dieta M, consistente en 100 g de pienso A y 100 g de pienso B, y la dieta N que consiste en 150 g de pienso A y 50 g de pienso B.

Considera las matrices:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} 100/10 \\ 100/10 \end{pmatrix}\ y\ N = \begin{pmatrix} 150/10 \\ 50/10 \end{pmatrix}$$

¿Qué significado tienen las matrices M y N?
¿Qué significado tienen las matrices $D^t \cdot M\ y\ D^t \cdot N$? ¿Qué dieta es más rica en proteínas?

SOLUCIÓN:

Si multiplicamos las matrices M y N por 10 nos dan las cantidades en gramos de cada uno de los piensos para cada una de las dietas. Como están divididas por 10, dichas cantidades están referidas a unidades de 10g (coincidiendo con la forma en que nos dan la composición de los piensos A y B)

En cuanto al producto:

$$D^t \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100/10 \\ 100/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 130 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Expresa la cantidad de hidratos de carbono, proteínas y grasas respectivamente, que contiene la dieta M.

Mientras que

$$D^t \cdot N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150/10 \\ 50/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 135 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Son las mismas cantidades, pero referidas a la dieta N.

La dieta más rica en proteínas, es por tanto la N, ya que tiene 135 unidades frente a las 130 unidades de M

Ejercicio 3

(1 punto) Representa en el plano el recinto delimitado por las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{r} x \le 2y \\ y \le 3 \\ x + \dfrac{2}{3}y \le 2 \end{array}\right\}$$

(0.75 puntos) Obtén (si existen) el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 3x + 2y$ restringida a la región anterior

(0,75 puntos) Razona si $f(x,y)$ toma el valor 7

SOLUCIÓN:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\, x \le 2y \\ (2)\ y \le 3 \\ (3)\ \ x + \dfrac{2}{3}y \le 2 \end{array}\right\}$$

Para representar la región factible calculamos los puntos de corte de las rectas con los ejes y determinamos por ensayo qué semiplano satisface la inecuación. Por simplicidad tomaremos siempre que sea posible el punto de coordenadas (x,y) = (0, 0).

(1)

x	Y
0	0
6	3

$(x,y) = (1,0)$

$¿1 \le 0?\ NO$

(2)

x	y
cualquiera	3

$(x,y) = (0,0)$

$¿0 \le 3?\ SI$

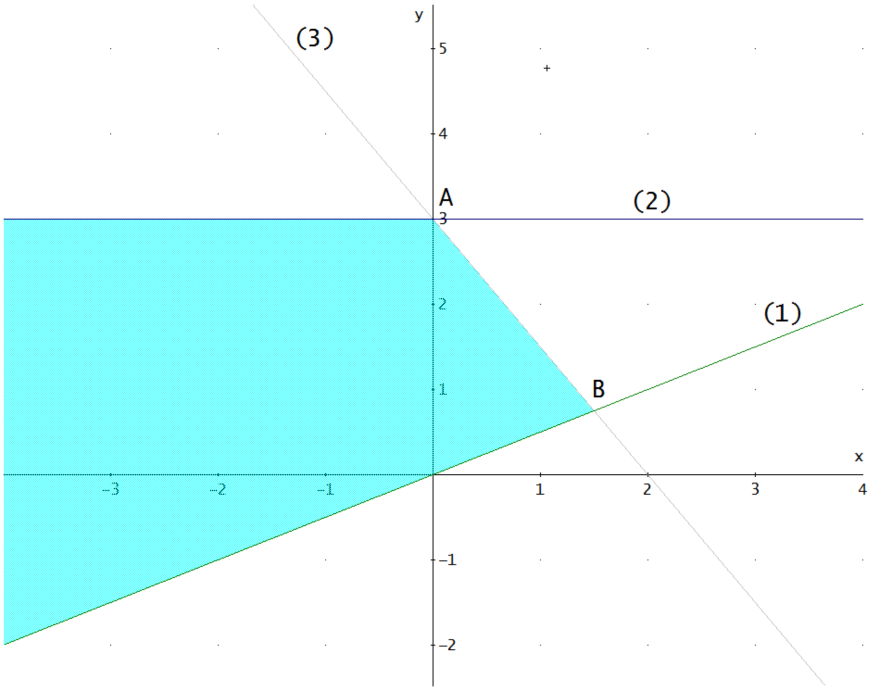
(3)

x	y
0	3
2	0

$(x,y) = (0,0)$

$¿0 + 0 \le 2?\ SI$

Con estos datos podemos elaborar la siguiente gráfica:



Ahora habrá que calcular los vértices. Para A no es necesario ningún cálculo, ya que está sobre el eje y ya lo hemos calculado. Para B resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente ese punto:

$$B: (1) \cap (3)$$

$$\left.\begin{array}{c} x = 2y \\ x + \frac{2y}{3} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$$

A continuación, nombramos los vértices y calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$Punto: (x, y)$	$Valor\ de\ f(x, y) = 3x + 2y$
$A: (0{,}3)$	$f(0, 3) = 0 + 6 = 6$
$B: (3/2, 3/4)$	$f(3/2, 3/4) = 9/2 + 6/4 = 6$

Como vemos en la gráfica se trata de una región abierta. Para resolver trazamos un par de rectas de función constante, para dos valores distintos, tomamos, por ejemplo, f=6 (nos lo sugieren los puntos que tenemos) y f=0.

$f = 6 \Longrightarrow 3x + 2y = 6$ (r6)
$f = 0 \Longrightarrow 3x + 2y = 0$ (r0)

Para representarlas, tomamos dos puntos de cada recta:

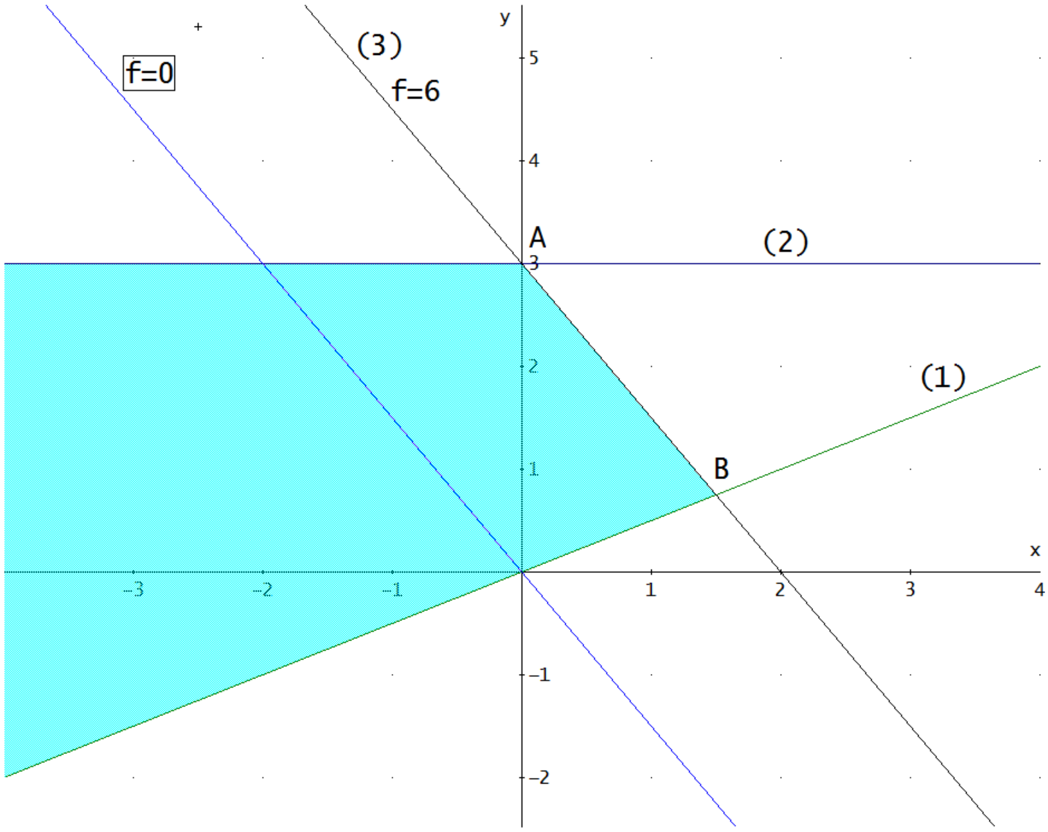
(r6)

x	Y
0	3
2	0

(r0)

x	y
0	0
-2	3

Por último, la gráfica nos queda de la siguiente forma:



Por tanto concluimos:

- El máximo de la función es 6 y se alcanza en el segmento de recta que une los puntos A y B.
- La función no tiene mínimo
- Como el máximo es 6 la función no alcanza nunca el valor 7 dentro de la región

Ejercicio 4

En un jardín municipal se desea plantar un mínimo de 1200 geranios, 3200 claveles y 3000 margaritas. Una empresa A ofrece un lote que contiene 30 geranios, 40 claveles, y 30 margaritas por 15 euros. Otra empresa B ofrece un lote de 10 geranios, 40 claveles y 50 margaritas por 12 euros.

(3 puntos) Calcula cuántos lotes de cada tipo debe comprar el ayuntamiento para que el gasto sea mínimo.

(0,5 puntos) Halla cuántos geranios, claveles y margaritas adquiere el ayuntamiento con la compra de precio mínimo y di cuántas plantas de cada tipo ha adquirido de más sobre la cantidad mínima.

SOLUCIÓN:

Llamemos "x" al número de lotes que se compran a la empresa A e "y" al número de lotes que se compran a la empresa B. Podemos representar los datos del problema con la siguiente tabla:

	Geranios	Claveles	Margaritas	Precio (€)
Empresa A	30	40	30	15
Empresa B	10	40	50	12

Las condiciones las podemos expresar mediante el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & 30x+10y \geq 1200 \\ (2) & 40x+40y \geq 3200 \\ (3) & 30x+50y \geq 3000 \\ (4) & x \geq 0 \\ (5) & y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Habrá que obtener el mínimo del gasto que cumpla esos requisitos, que viene dado por la función:

$$f(x,y) = 15x + 12y$$

Para representar la región factible calculamos los puntos de corte de las rectas con los ejes y determinamos por ensayo qué semiplano satisface la inecuación. Por simplicidad tomaremos siempre que sea posible el punto de coordenadas (x,y) = (0, 0).

(1)

x	y
0	120
40	0

(2)

x	y
0	80
80	0

(3)

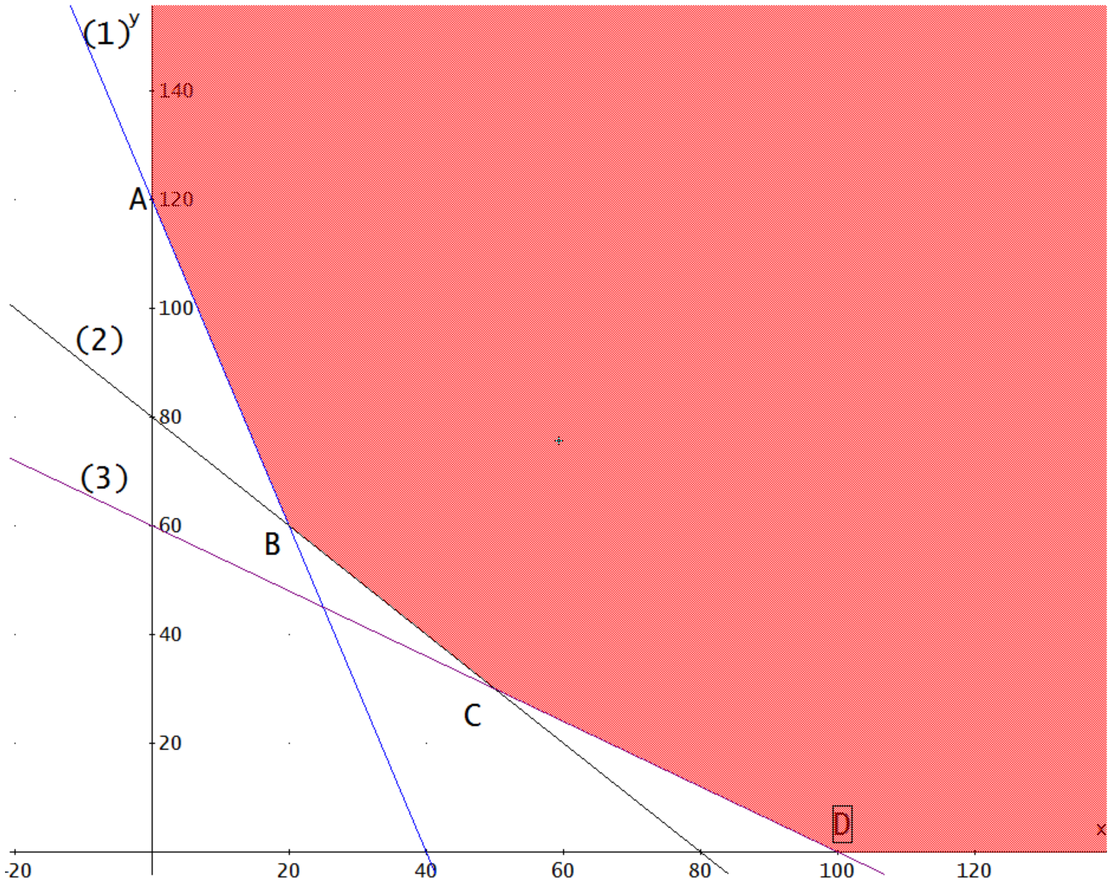
x	y
0	60
100	0

$(x,y) = (0,0)$
$¿\,0+0 \geq 1200?\ NO$

$(x,y) = (0,0)$
$¿\,0+0 \geq 3200?\ NO$

$(x,y) = (0,0)$
$¿\,0+0 \geq 3000?\ NO$

Con estos datos y las condiciones de no negatividad (4) y (5) podemos elaborar la siguiente gráfica:



Ahora habrá que calcular los vértices. Para A, y D no es necesario ningún cálculo, ya que están sobre los ejes y ya los hemos calculado. Para el resto resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente a cada punto:

$$B: (1) \cap (2)$$
$$\left.\begin{array}{r} 30x + 10y = 1200 \\ 40x + 40y = 3200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + y = 120 \\ 4x + 4y = 320 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 60 \end{array}\right\}$$

$$C: (2) \cap (3)$$
$$\left.\begin{array}{r} 40x + 40y = 3200 \\ 30x + 50y = 3000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 4y = 320 \\ 3x + 5y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 50 \\ y = 30 \end{array}\right\}$$

A continuación nombramos los vértices y calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$Punto: (x, y)$	$Valor\ de\ f(x, y) = 15x + 12y$
$A: (0,120)$	$f(0, 120) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 120 = 1440$
$B: (20,60)$	$f(20, 60) = 15 \cdot 20 + 12 \cdot 60 = 1020$
$C: (50,30)$	$f(50, 30) = 15 \cdot 50 + 12 \cdot 30 = 1110$
$D: (100,0)$	$f(100, 0) = 15 \cdot 100 + 12 \cdot 0 = 1500$

Como vemos en la gráfica se trata de una región abierta. Para resolver trazamos un par de rectas de función constante, para dos valores distintos, tomamos, por ejemplo, f=1020 y f=1500 (nos lo sugieren los puntos que tenemos).

$f = 1020 \Longrightarrow 15x + 12y = 1020$ (rA)
$f = 1500 \Longrightarrow 15x + 12y = 1500$ (rD)

Para representarlas, tomamos dos puntos de cada recta:

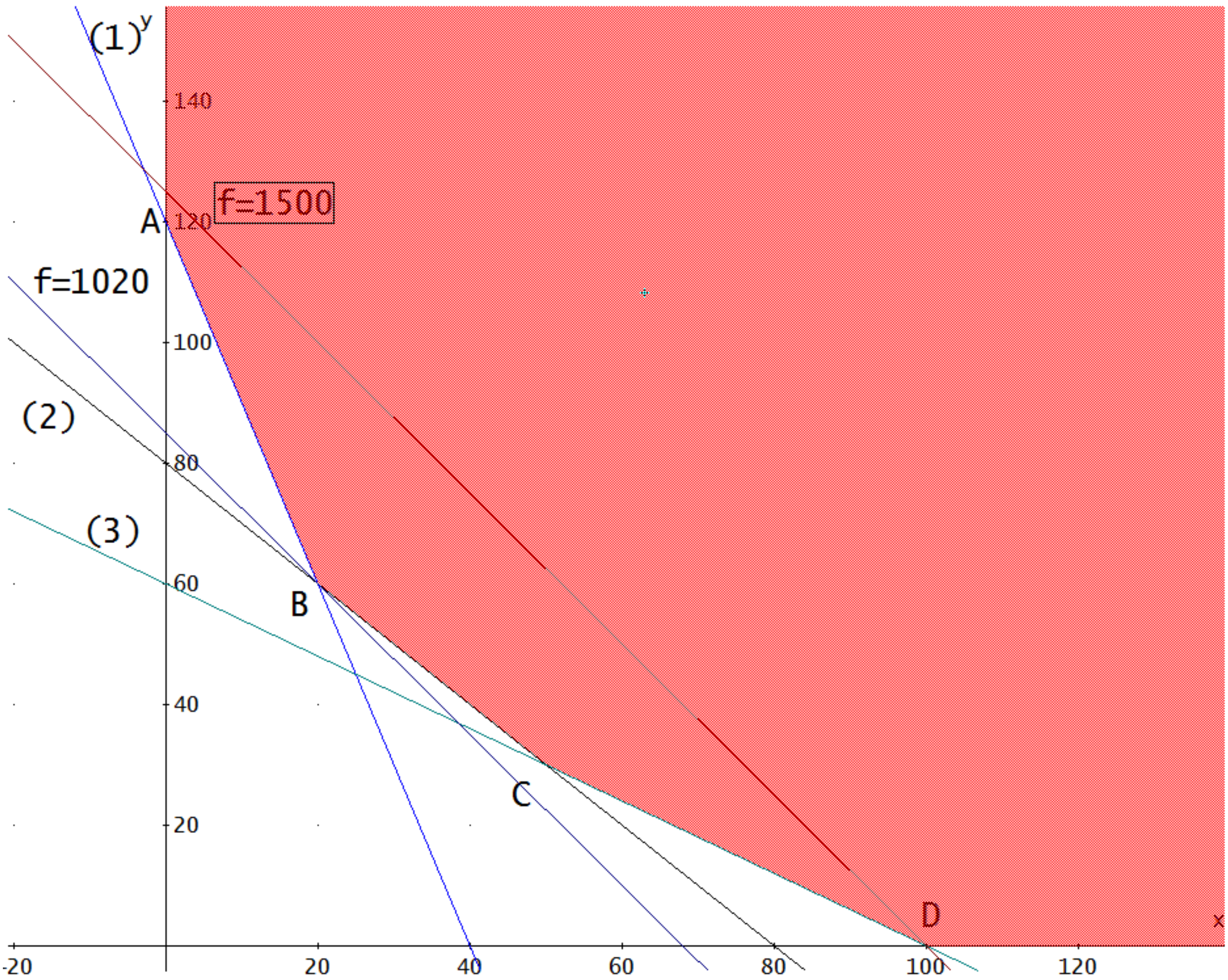
(rA)

x	Y
0	85
68	0

(rB)

x	y
0	125
100	0

Por último, la gráfica nos queda de la siguiente forma:



Observamos que la función objetivo crece indefinidamente en una dirección en la que la región es abierta, por tanto no tiene máximo y además su mínimo es 1020, alcanzándose éste en el punto B. Por tanto: **El gasto mínimo es 1020 y se consigue comprando 20 lotes a la empresa A y 60 lotes a la empresa B.**

En estas condiciones se habrán conseguido las siguientes cantidades de cada planta:

Planta	Cantidad adquirida	Exceso sobre el mínimo
Geranios	20·30+60.10=1200	1200-1200=0
Claveles	20·40+60.40=3200	3200-3200=0
Margaritas	20·30+60·50=3600	3600-3000=600

Por tanto claveles y geranios están en la cantidad justa y sobran 600 plantas de margaritas.