

Estos ejercicios son una recopilación de los problemas de álgebra de los exámenes de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.

- 1.- Escribe la matriz ampliada asociada al siguiente sistema de ecuaciones. Resuélvelo por el método de Gauss-Jordan y clasifícalo.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = -3 \\ 4x - y + 6z = 15 \\ -6x - 5y + x = -6 \end{array} \right\}$$

- 2.- Un automóvil sube las cuestas a 54 km/h. Las baja a 90 km/h y en llano marcha a 80 km/h. Para ir de A a B tarda 2 horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 38 minutos. ¿Cuál es la longitud del camino llano entre A y B si se sabe que A y B distan 192 km?

- 3.- Encuentra un número de 3 cifras que verifique las siguientes propiedades:

- La suma de sus cifras es 24
- Si se intercambian las cifras de las unidades y de las decenas, el número disminuye en nueve unidades
- Si se intercambian las cifras de las centenas y de las decenas, el número disminuye en 90 unidades

- 4.- Utilizando el método de Gauss-Jordan, calcula la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- 5.- Sean las matrices A y B definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X tal que verifique $X \cdot B = A + B$

- 6.- Discute y resuelve el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y + z - t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0 \\ x + 2y + 4z + 2t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \end{array} \right\}$$

7.- Se dispone de un recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas, A, B, y C. Se sabe que el volumen de A es el doble del de B, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?

8.- Dado el sistema $2x + y + x = 7$ Se pide:

$$x + z = 4$$

a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

c) Comprobar que si se añade la ecuación $4x - y + 2z = 14$, el sistema resultante es compatible determinado

d) Resolver el sistema del apartado anterior

9.- En una ciudad andaluza, por detener un vehículo en zona prohibida, se impone al infractor una sanción de 5000 ptas. Si se abona el importe de la sanción durante los 10 primeros días se aplica una bonificación del 40%, pero si se abona pasados treinta días se aplica un recargo del 20%.

Sabiendo que por las 500 sanciones que se impusieron un determinado día, el ayuntamiento de la citada ciudad recaudó 2.050.000 ptas., y el número de sanciones que se cobraron con recargo sólo fue la quinta parte del que se cobraron con bonificación, determina el número de sanciones que se cobraron sin bonificación y sin recargo.

10.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + y + z = -1 \\ x - y + z = -1 \end{array} \right\}$$

11.- Las superficies de dos cuadrados suman 8621 centímetros cuadrados y el producto de sus diagonales es 8540. ¿Cuál es la longitud de sus lados?

12.- En una hucha hay monedas de 5, 25 y 100 pesetas. Sabemos que en total hay 600 monedas, con un valor de 35500 pesetas, y que si juntamos las monedas de 5 y 25 pesetas, hay la misma cantidad de monedas que si sólo nos quedamos con las de 100 pesetas. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

13.- Resuelve la siguiente ecuación expresada matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + y + 3z = 1 \end{array} \right\}$$

15.- Halla tres múltiplos consecutivos de 4 cuya suma sea 144.

16.- Calcula la matriz inversa de:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

17.- Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = 4 \end{array} \right\}$$

18.- Las restricciones pesqueras impuestas por la CEE obligan a cierta empresa a pescar como máximo 2000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de rape, además, el total de las capturas de estas dos especies no debe superar las 3000 toneladas. Si el precio de la merluza en lonja es de 1000 ptas/Kg y el de rape es de 1500 ptas/Kg ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

19.- Una fábrica produce dos tipos de sombreros: A y B. La fabricación de los sombreros se realiza en tres fases: moldeado, pintura y montaje. La fabricación del modelo A requiere 2 horas de moldeado, 3 de pintura y una de montaje. La del modelo B requiere 3 horas de moldeado, 2 de pintura y 1 de montaje. Las secciones de moldeado y pintura disponen, cada una, de un máximo de 1500 horas cada mes, y la de montaje 600.

Si el modelo A se vende a 8000 pesetas y el B a 11000 pesetas, ¿qué cantidad de sombreros de cada tipo ha de fabricarse para maximizar el beneficio mensual?

- 20.- Una fábrica de coches monta dos tipos de vehículos, los de clase normal, que cuestan 1,7 millones de pesetas y los de clase especial, que cuestan 2,3 millones de pesetas. La producción está limitada por el hecho de que no pueden fabricarse más de 40 coches normales, y 30 de la clase especial, ni más de 50 en total. Si se vende toda la producción de coches, ¿cuántos hay que fabricar de cada clase para obtener una facturación máxima?
- 21.- La suma de las tres cifras de un número es 6 y, si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente, si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.
- 22.- 10. Un alumno llamado Juan sale de un examen de Matemáticas y le explica a su amigo Pedro el enunciado de un problema. El diálogo es el siguiente:

Juan: Debíamos resolver un sistema de Cramer de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Las dos primeras ecuaciones eran $3x + 4y + 5z = 18$, $x - y + z = 3$. La tercera no la recuerdo.

Pedro: ¿No recuerdas nada?

Juan: Era $x + 4y$ más un número que no recuerdo, que multiplicaba a la z , y daba 8.

Pedro: ¿Era entero?

Juan: Sí, y positivo. Además, la solución era estrictamente positiva.

Hallar el enunciado correcto del examen.

- 23.- Acaban de salir al mercado dos piensos compuestos diferentes, Porky y Cerdy, cuyos costes son de 20 y 10 euros el saco, respectivamente. Ambos contienen una dieta basada en los nutrientes P y C. Un saco de Porky proporciona 3 unidades de P y 1 unidad de C. Por su parte, un saco de Cerdy proporciona 1 unidad de P y 2 de C.

Si las necesidades nutritivas de una pira son de 300 unidades de P y 200 de C a la semana, determina la cantidad de cada compuesto que hay que comprar para que el gasto sea mínimo.

- 24.- Dibújese el recinto que cumple las siguientes restricciones:

$$x \geq 0 \qquad y - 4 \leq 0 \qquad y - x + 1 \geq 0 \qquad y + 2x - 5 \leq 0$$

Localiza el punto del recinto en el que la función objetivo $F(x,y) = x + y$ se hace máxima

- 25.- Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos se necesitó la utilización de unidades de madera, plástico y aluminio tal y como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

	Madera	Plástico	Aluminio
Silla	1 unidad	1 unidad	2 unidades
Mecedora	1 unidad	1 unidad	3 unidades
Sofá	1 unidad	2 unidades	5 unidades

- 26.- A) ¿Puede ocurrir que dos matrices se puedan sumar pero no se puedan multiplicar?
 B) Todo sistema homogéneo es compatible determinado. ¿Verdadero o falso?
 C) Discute el sistema en función de los valores del parámetro k.

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ kx + 2z &= 0 \\ 2x - y + kz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

27.- Sean A y B dos matrices de dimensión $n \times 1$ y C una matriz de dimensión desconocida.

- a) Si $M \cdot A = B$ ¿qué dimensiones debe tener la matriz M?
 b) Si $M^{-1} \cdot C = B$, ¿qué dimensión debe tener la matriz C? ¿qué propiedad debe cumplir el determinante de la matriz M?

c) si $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, ¿Cuál es el valor de M?

28.- Una empresa vinícola cultiva 2 variedades de uva, A y B, para elaborar 2 tipos de vino mezclándolas. En un litro de vino del primer tipo, la tercera parte procede de uva de la variedad B; mientras que en un litro del segundo tipo, la cuarta parte procede de dicha variedad.

La cosecha del año permitirá elaborar 350 litros de vino procedente de la variedad A y 150 litros de vino procedente de la variedad B. Si el precio de venta del primer vino es de 6 euros/litro y el segundo tipo es de 5 euros/litro, determina los litros de vino de cada tipo que debe producir para obtener los máximos ingresos.

29.- Tres estudiantes deciden regalar una calculadora gráfica de 8600 pts a un amigo. Deciden reunir esa cantidad de la siguiente forma: Pedro aporta el triple de lo que aportan los otros dos juntos; Juan aporta tres pesetas por cada dos que aporta José. Se pide:

- A) Plantea el sistema de ecuaciones lineales del problema.
 B) Resuelve el sistema utilizando técnicas matriciales.

30.- Discute (clasifica según el número de soluciones) el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ -2x + 3y - 2z &= -1 \\ x + 5y - 3z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

31.- Sean las matrices A, B y C definidas como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla una matriz X tal que verifique $A \cdot X + B = C$

- 32.- Sean A una matriz de dimensión 5×4 , B una matriz de dimensión $m \times n$ y C de dimensión 3×7 . Si se sabe que se puede obtener la matriz producto ABC, ¿cuál es la dimensión de la matriz B? ¿Y la de la matriz ABC?

Si A es una matriz, ¿existe siempre el producto $A^T \cdot A$? Razona la respuesta

- 33.- Discute (clasifica según el número de soluciones) el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{array} \right\}$$

- 34.- Sea la matriz A definida como $A = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donde y es un número entero.

- a) Determinar los valores de y para los cuales la matriz A tiene inversa
b) Calcular la matriz inversa en estos casos

- 35.- Responde a las siguientes cuestiones

- A. Un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas tiene como solución $x=1, y=-1, z=0, t=3$. ¿Qué puedes decir del determinante de la matriz de los coeficientes?
- B. Si en un sistema compatible determinado de tres ecuaciones con tres incógnitas se suprime una de las ecuaciones ¿cómo es el sistema resultante?
- C. Si a un sistema de ecuaciones compatible indeterminado le añadimos una ecuación que es combinación lineal de las demás ¿cómo es el sistema resultante?

- 36.- Una cooperativa farmacéutica distribuye un producto en tres formatos distintos A., B y C. Las cajas de tipo A tienen un peso de 250 g y un precio de 100 ptas., las del tipo B pesan 500 g y su precio es de 180 ptas., mientras que las C pesan 1 kg y cuestan 330 ptas. A una farmacia se le ha suministrado un lote de 5 cajas, con un peso de 2,5 kg, por un importe de 890 ptas. ¿Cuántos envases de cada tipo ha comprado la farmacia?

- 37.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Expresarlo en la forma matricial $AX=B$ y calcular la matriz inversa A^{-1}
b) Resolverlo

38.- Responde a las siguientes cuestiones

- A. ¿Cómo han de ser las dimensiones de dos matrices para poder efectuar su adición? ¿Y su producto?
- B. ¿Es posible calcular la inversa de cualquier matriz? Ilustra tu respuesta con ejemplos
- C. Localiza el error en la resolución de la siguiente ecuación matricial

$$AX = B$$

$$A^{-1}AX = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

39.- Carlos y Antonia elaboran un trabajo de final de curso que consiste en construir la maqueta de un pueblo. Disponen de una mesa de $7,3 \text{ m}^2$ en la que quieren situar dos tipos de edificios. El primer tipo ocupa una superficie de 46 dm^2 y su construcción cuesta 20 céntimos de euro y el segundo ocupa una superficie de 14 dm^2 y cuesta 16 céntimos de euro.

Si disponen de un total de 3,5 euros, determina el máximo número de edificios que pueden colocar en su trabajo.

40.- Una fábrica dispone de tres máquinas, A, B y C, para producir cierto artículo. Cuando trabajan las tres se fabrican 2000 unidades de dicho artículo por día. Si la A no funciona, pero la B y la C sí, la producción desciende un 25%, y cuando la A y la B funcionan normalmente, pero C sólo a las tres cuartas partes de su rendimiento normal, la producción baja un 10%. ¿Cuántas unidades fabrica habitualmente cada máquina?